Vektorräume

$$\boxed{K \quad \text{Körper}}$$

4.1 Def: Ein Vektorraum über K / K-Vektorraum $(V, +, \odot)$ ist eine abelsche Gruppe $(V, +)$ zusammen mit einer Abbildung

$$\odot : K \times V \longrightarrow V,$$

sodass $\forall r, s \in K$ und $\forall \underline{u}, \underline{v} \in V$ gilt:

$$\begin{array}{lll}
(V1) & r \odot (\underline{u} + \underline{v}) & = r \odot \underline{u} + r \odot \underline{v} \\
(V2) & (r+s) \odot \underline{v} & = r \odot \underline{v} + s \odot \underline{v} \\
(V3) & (r \cdot s) \odot \underline{v} & = r \odot (s \odot \underline{v}) \\
(V4) & 1 \odot \underline{v} & = \underline{v}
\end{array}$$

Elemente von V:	Vektoren	$\underline{v}$
Nullelement von $(V,+)$:	Nullvektor	$\underline{0}$
Elemente von K:	Skalare	

$\odot$ Skalarmultiplikation

4.2 Notiz: Es gilt dann ferner:

(a) $s \odot \underline{v} = \underline{0} \iff (s = 0 \vee \underline{v} = \underline{0})$

(b) $(-1) \odot \underline{v} = -\underline{v}$

Beweis:

a:

$(\Leftarrow)$ $0 \odot \underline{v} = (0+0) \odot \underline{v} \overset{}{\underset{V2}{=}} 0 \odot \underline{v} + 0 \odot \underline{v} \quad \Big| \; - 0 \odot \underline{v}$

$$\underline{0} = 0 \odot \underline{v}$$

$$s \odot \underline{0} = s \odot (\underline{0} + \underline{0}) \underset{V1}{=} s \odot \underline{0} + s \odot \underline{0}, \text{ also}$$

$$\underline{0} = s \odot \underline{0}$$

$(\Rightarrow)$ Sei $s \odot \underline{v} = \underline{0}$. Falls $s = 0$ ✓

Falls $s \neq 0$:

$$\underline{v} \underset{V4}{=} 1 \odot \underline{v} = (s^{-1} \cdot s) \odot \underline{v}$$

$$\underset{V3}{=} s^{-1} \odot \underbrace{(s \odot \underline{v})}_{\underline{0}} = \underline{0}$$

siehe $(\Leftarrow)$

b: $(-1) \odot \underline{v} + \underline{v} \underset{V4}{=} (-1) \odot \underline{v} + 1 \odot \underline{v}$

$$\underset{V2}{=} (-1+1) \odot \underline{v}$$

$$= 0 \odot \underline{v} = \underline{0}$$

$\square$

Beispiele:

(a) $\mathbb{R}^d = \underbrace{\mathbb{R} \times \ldots \times \mathbb{R}}_{d}$ mit koordinatenweise $+$ & $\odot$

$$(x_1, \ldots, x_d) + (y_1, \ldots, y_d) := (x_1 + y_1, \ldots, x_d + y_d)$$

$$s \odot (x_1, \ldots, x_d) := (s x_1, \ldots, s x_d)$$

ist ein $\mathbb{R}$-VR.

Genauso: K^d ist K-VR für jeden Körper K.

Notation: Wenn wir K^d als K-VR auffassen schreiben wir Elemente als Spalten

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_d \end{pmatrix} \qquad (x_i \in K)$$

(b) Der Polynomring $K[X]$ ist ein K-VR bezüglich Polynomaddition und -multiplikation:

$$\odot : K \times K[X] \longrightarrow K[X]$$
$$s, A \longmapsto s \cdot_p A$$

aufgefasst als konstantes Polynom

$(V_1, V_2) \Leftarrow (R3)$

$(V3) \Leftarrow (R2a)$

$(V4) \Leftarrow 1 \in K[X]$ neutral bzgl $\cdot_p$ (R2b).

(c) $\mathbb{C}$ ist (nicht nur $\mathbb{C}$-VR, sondern auch) $\mathbb{R}$-VR

$+_{\mathbb{C}} = +$: gewöhnliche Addition

$\odot$: $\mathbb{R} \times \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$

$(r, x+iy) \longmapsto r \cdot_{\mathbb{C}} (x+iy) = rx + iry$

Analog: $\mathbb{C}$ ist $\mathbb{Q}$-VR

$\mathbb{R}$ ist $\mathbb{Q}$-VR.

(d) I Menge

$\mathrm{Abb}(I, \mathbb{R}) := \{ f : I \longrightarrow \mathbb{R} \}$

Def. für $f, g \in \mathrm{Abb}(I, \mathbb{R})$, $r \in \mathbb{R}$:

$$f + g := (t \longmapsto f(t) + g(t)) \in \mathrm{Abb}(I, \mathbb{R})$$

in $\mathbb{R}$

$$r \odot f := (t \longmapsto r \cdot f(t)) \in \mathrm{Abb}(I, \mathbb{R})$$

Mit diesen Def. ist $(\mathrm{Abb}(I, \mathbb{R}), +, \odot)$ ein $\mathbb{R}$-VR.

4.4 Def: Sei $(V, +, \odot)$ ein K-VR.
Ein **Untervektorraum (UVR)** von V ist Untergruppe $U \subseteq V$, sodass sich $\odot$ einschränken lässt

$$\odot : K \times U \longrightarrow U,$$

und sodass $(U, +, \odot)$ selbst wieder ein VR ist.

4.5 Notiz: $U \subseteq V$ ist genau dann ein UVR, wenn gilt:

(i) $\underline{0} \in U$

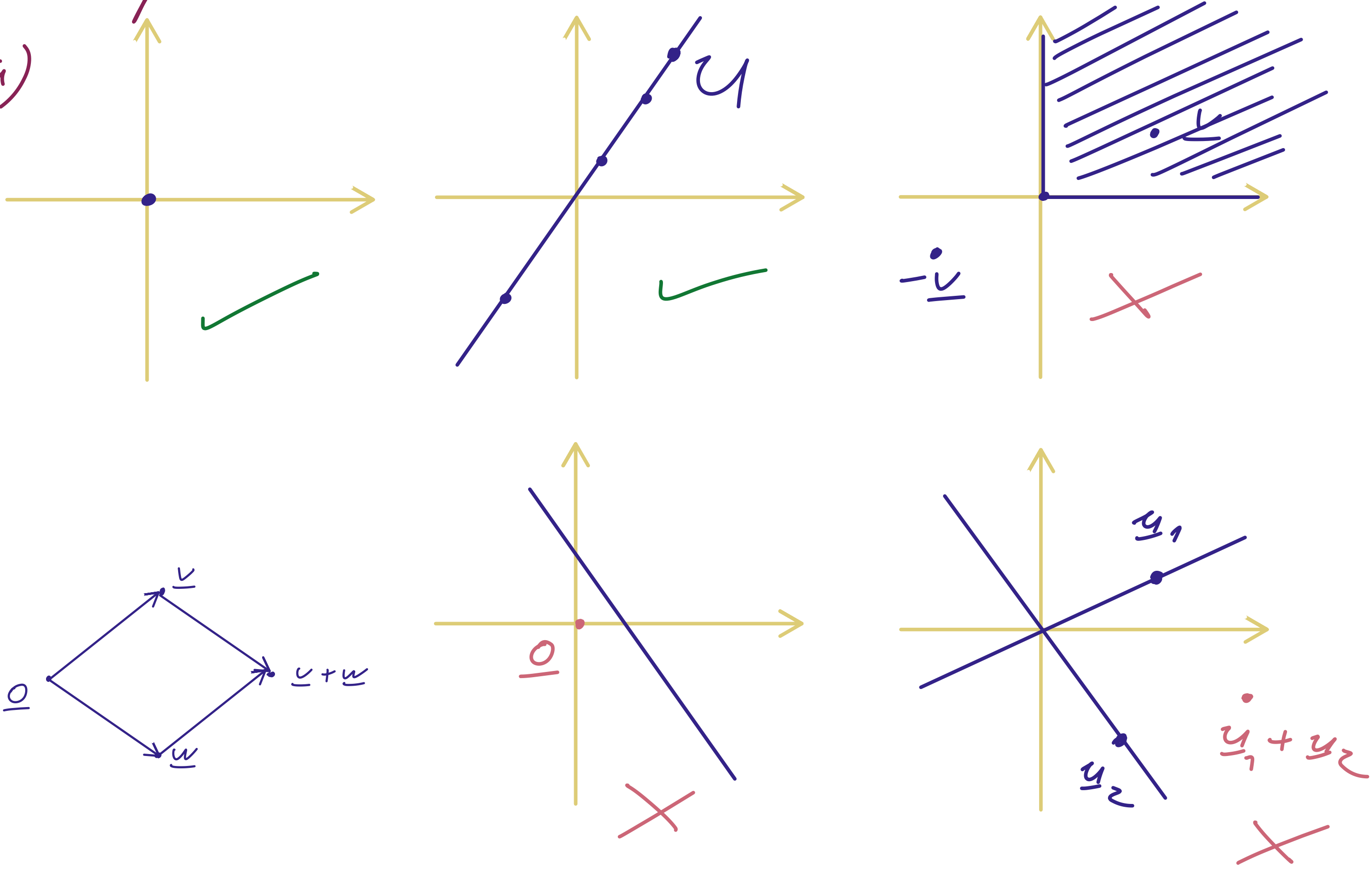
(ii) $\underline{u}_1, \underline{u}_2 \in U \Rightarrow \underline{u}_1 + \underline{u}_2 \in U$

(iii) $\underline{u} \in U, s \in K \Rightarrow s \cdot \underline{u} \in U$

(Die Bedingung $(\underline{u} \in U \Rightarrow -\underline{u} \in U)$ folgt bereits aus (iii) mit $s = -1$.)

Beispiele: $V = \mathbb{R}^2$

(a)



(b) $K[X]_{\le n} := \{ A \in K[X] \mid \deg(A) \le n \}$

($n \in \mathbb{N}_0$) ist UVR von $K[X]$

$K[X]_{> n} := \{ A \in K[X] \mid \deg(A) > n \}$

ist kein UVR $(0 \notin)$.

(c) $I \subseteq \mathbb{R}$ Intervall

$\mathcal{C}^0(I) := \{ f : I \longrightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ stetig} \}$

$\subseteq \mathrm{Abb}(I, \mathbb{R})$

ist ein UVR.

ab jetzt: "$\cdot$" oder "" für $\odot$

Konstruktionen mit UVR

$(V,+,\cdot)$ ein K-VR

4.6 Satz: Der Schnitt beliebiger UVR ist wieder ein UVR.

$$\Big(U_i \subseteq V \text{ UVR} \Longrightarrow \bigcap_i U_i \subseteq V \text{ UVR}\Big)$$

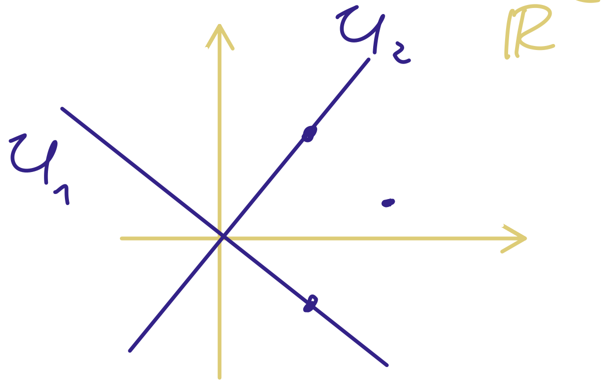
Beweis:

(i) $\underline{0} \in U_i$ für jedes $i \in I$, daher $\underline{0} \in \bigcap_{i\in I} U_i$.

(ii) Seien $\underline{u}_1, \underline{u}_2 \in \bigcap_{i\in I} U_i$, also $\forall i: \underline{u}_1 \in U_i$ und $\underline{u}_2 \in U_i$.
Da U_i UVR, folgt
$\forall i: \underline{u}_1 + \underline{u}_2 \in U_i$, also $\underline{u}_1 + \underline{u}_2 \in \bigcap_{i\in I} U_i$.

(iii) analog. $\square$

⚠ Vereinigungen von UVR sind i.A. keine UVR, z.B.:



statt dessen: Summe (s.u.)

$M \subseteq V$ Teilmenge

4.7 Def: Eine Linearkombination von Vektoren aus M ist eine endliche Summe der Form

$$\sum_{i=1}^{n} s_i \cdot \underline{v}_i = s_1 \cdot \underline{v}_1 + \ldots + s_n \underline{v}_n$$

mit $s_i \in K/_0$, $\underline{v}_i \in M$.

$$\sum_{i=1} := \underline{0}$$

4.8 Def: Die lineare Hülle $\langle M \rangle$ ist die Menge aller Linearkombinationen von Vektoren aus M.

4.9 Satz: $\langle M \rangle$ ist der kleinste UVR, der M enthält.

Beweis:
$\langle M \rangle$ ist ein UVR, denn $\langle M \rangle$ erfüllt (i), (ii), (iii) aus Notiz 4.5.

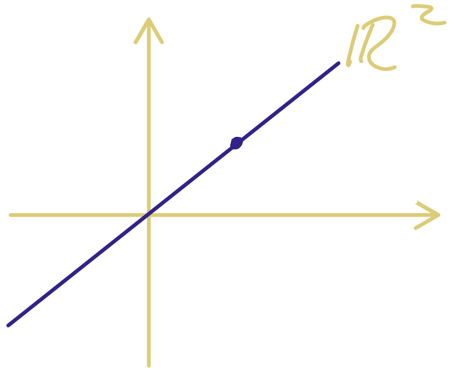
$M \subseteq \langle M \rangle$ (Schreibe $\underline{v} \in M$ als $1 \cdot \underline{v}$)

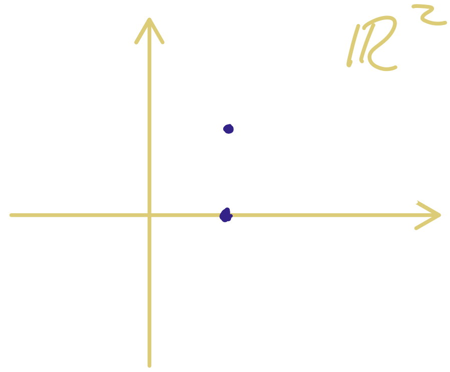
Sei U UVR, der M enthält.
Dann ist $\langle M \rangle \subseteq U$, denn U erfüllt (ii) & (iii) aus Notiz 4.5 $\square$

Beispiele:

(a) $\langle \emptyset \rangle = \{\underline{0}\}$ (in beliebigem VR V)

(b)





$\left\langle \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \right\rangle = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix} \,\middle|\, x \in \mathbb{R} \right\}$ $\qquad$ $\left\langle \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \right\rangle = \mathbb{R}^2$

(c) $V = K[X]$ (Polynomring)

$\langle \{1, X, X^2\} \rangle = K[X]_{\leq 2}$

$\langle \{ X^i \mid i \in \mathbb{N}_0 \} \rangle = K[X]$

4.10 Def: Die interne Summe von UVR $U_1, U_2 \subseteq V$ ist der UVR

$$U_1 + U_2 := \langle U_1 \cup U_2 \rangle$$

Allgemeiner:

$$\sum_{i \in I} U_i := \Big\langle \bigcup_{i \in I} U_i \Big\rangle$$

4.11 Notiz: $U_1 + U_2 = \{ u_1 + u_2 \mid u_i \in U_i \}$

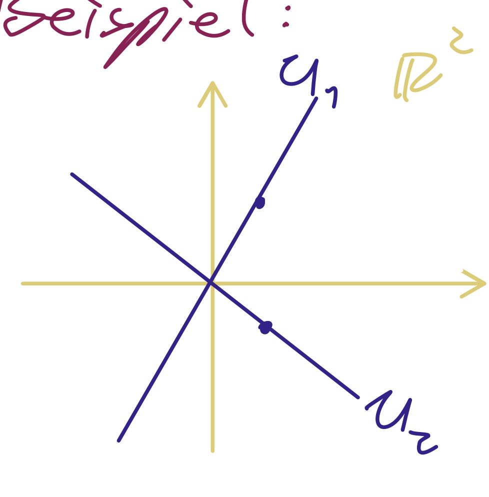
(($\supseteq$) ✓

($\subseteq$) Eine beliebige Linearkombination aus $U_1 + U_2$ lässt sich schreiben als

$$U_1 \ni \sum_i s_i \cdot v_i + \sum_j s_j' \cdot v_j \in U_2$$

mit $v_i \in U_1$ und $v_j \in U_2$ $\forall i, j$.)

Beispiel:



$U_1 + U_2 = \mathbb{R}^2$

$U_1 + U_1 = U_1$